XLVIII Olimpiada Matemática Española
Fase nacional 2012 (Santander)
Primera sesión (23 de marzo)

Problema 1

Determinar razonadamente si el número $\lambda_n = \sqrt{3n^2 + 2n + 2}$ es irracional para todo entero no negativo n.

Problema 2

Hallar todas las funciones $f : R \to R$ de variable real con valores reales, tales que

$$(x-2)f(y) + f(y + 2f(x)) = f(x + yf(x))$$

para todo $x, y \in R$.

Problema 3

Sean x y n enteros tales que $1 \le x < n$. Disponemos de $x+1$ cajas distintas y $n-x$ bolas idénticas. Llamamos $f(n,x)$ al número de maneras que hay de distribuir las $n-x$ bolas en las $x+1$ cajas. Encontrar los enteros n mayores que 1 para los que se verifica que el número primo p es divisor de $f(n,x)$ para todo $x \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre siete puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.

XLVIII Olimpiada Matemática Española
Fase nacional 2012 (Santander)
Segunda sesión (24 de marzo)

Problema 4

Hallar todos los números enteros positivos n y k, tales que $(n+1)^n = 2n^k + 3n + 1$.

Problema 5

Una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ se define mediante la recurrencia

$$a_1 = 1,\ a_2 = 5,\ a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 4}{a_{n-2}},\ \text{para } n \geq 3.$$

Demostrar que todos los términos de la sucesión son números enteros y encontrar una fórmula explícita para a_n.

Problema 6

Sea ABC un triángulo acutángulo, ω su circunferencia inscrita de centro I, Ω su circunferencia circunscrita de centro O, y M el punto medio de la altura AH, donde H pertenece al lado BC. La circunferencia ω es tangente a este lado BC en el punto D. La recta MD corta a ω en un segundo punto P, y la perpendicular desde I a MD corta a BC en N. Las rectas NR y NS son tangentes a la circunferencia Ω en R y S respectivamente. Probar que los puntos R, P, D y S están en una misma circunferencia.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre siete puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.