

OLIMPIADA MATEMÁTICA

PROBLEMAS 2012

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

SOLUCIONES DE LA 48ª OME

1. Determinar razonadamente si el número $\lambda_n = \sqrt{3n^2 + 2n + 2}$ es irracional para todo entero no negativo n .

SOLUCIÓN. Supongamos que n es par. Entonces, $3n^2 + 2n$ es múltiplo de 4 y $3n^2 + 2n + 2$ es múltiplo de 2 pero no de 4, con lo que no puede ser un cuadrado perfecto.

Supongamos que n es impar. Cualquier cuadrado perfecto impar da resto 1 al dividir entre 8; este resultado se demuestra trivialmente, escribiendo el cuadrado de cualquier entero impar $2m + 1$ en la forma $4m(m + 1) + 1$ y observando que, bien m , bien $m + 1$, ha de ser par. Se tiene entonces que si n es impar y $3n^2 + 2n + 2$ fuera un cuadrado perfecto, entonces $3n^2 + 2n + 2$ daría resto 1 al dividir entre 8, o equivalentemente, $2n$ daría resto $1 - 2 - 3 = -4$ al dividir entre 8, con lo que $2n$ sería múltiplo de 4 y n par, contradicción. Luego para cualquier entero, positivo o negativo, $3n^2 + 2n + 2$ es un entero que no es un cuadrado perfecto, por tanto λ_n es siempre irracional para cualquier entero n , positivo o negativo.

Nótese también que λ_n es siempre real, incluso cuando n es un entero negativo, pues $3n^2 + 2n + 2 > (n + 1)^2 \geq 0$.

2. Hallar todas las funciones $f : R \rightarrow R$ de variable real con valores reales, tales que

$$(x - 2)f(y) + f(y + 2f(x)) = f(x + yf(x)) \quad (1)$$

para todo $x, y \in R$.

SOLUCIÓN. Supongamos primeramente que $f(0) = 0$. Haciendo $x = 0$ en (1), $f(y) = 0$ para todo $y \in R$. Esta función satisface la ecuación funcional dada (1).

Sea $f(0) \neq 0$. Haciendo $y = 0$ en (1), se obtiene $(x - 2)f(0) + f(2f(x)) = f(x)$ para todo $x \in R$. Claramente esto implica que f es inyectiva porque si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $(x_1 - 2)f(0) + f(2f(x_1)) = f(x_1) = (x_2 - 2)f(0) + f(2f(x_2)) = f(x_2)$ y por tanto $(x_1 - x_2)f(0) = 0$ y $x_1 = x_2$.

Poniendo ahora $x = 2$ en (1), $f(y + 2f(2)) = f(2 + yf(2))$ para todo $y \in R$. Al ser f inyectiva $y + 2f(2) = 2 + yf(2)$ para todo $y \in R$. En esta igualdad si $y = 0$, $f(2) = 1$. Al ser inyectiva $f(3) \neq 1$; por tanto con $x = 3$ e $y = \frac{3}{1 - f(3)}$ se llega a

$f\left(\frac{3}{1-f(3)}+2f(3)\right)=0$. Hemos de demostrar que f tiene un cero. Sea a , tal que $f(a)=0$. Poniendo ahora $y=a$ en (1) resulta $f(a+2f(x))=f(x+af(x))$ para todo $x \in R$. Así por la inyectividad de f , $a+2f(x)=x+af(x)$ para todo $x \in R$. Como $a \neq 2$, $f(x)=\frac{x-a}{2-a}$. Sustituyendo esta función en (1) resulta que $a=1$, lo que proporciona dos únicas soluciones de la ecuación funcional inicial $f(x)=0$ y $f(x)=x-1$.

3. Sean x y n enteros tales que $1 \leq x < n$. Disponemos de $x+1$ cajas distintas y $n-x$ bolas idénticas. Llamamos $f(n,x)$ al número de maneras que hay de distribuir las $n-x$ bolas en las $x+1$ cajas. Encontrar los enteros n mayores que 1 para los que se verifica que el número primo p es divisor de $f(n,x)$ para todo $x \in \{1,2,\dots,n-1\}$.

SOLUCIÓN. Claramente $f(n,x)$ es el número de combinaciones con repetición de $x+1$ elementos tomados de $n-x$ en $n-x$. Es decir,

$$f(n,x) = CR(x+1, n-x) = \binom{(x+1)+(n-x)-1}{n-x} = \binom{n}{x}.$$

Vamos a probar que los n buscados son todos los de la forma p^a con a entero positivo. Sea m_p la p -parte del entero positivo m , es decir si $m = p^a q$ (con $q \geq 1$ entero), $m_p = p^a$, siendo $a \geq 1$ entero. Ahora probaremos el siguiente resultado previo:

Si $m_p = p^a$, entonces $(m-i)_p = i_p$ para cada $i \in \{1,2,\dots,p^a-1\}$.

En efecto, si $i_p = p^k$ entonces $k < a$ y es obvio que $p^k \mid (m-i)$, luego $i_p \leq (m-i)_p$.

Recíprocamente, si $(m-i)_p = p^k$, ha de ser $k < a$ porque si no sería $p^a \mid i$. Ahora, $p^k \mid i$ porque $p^k \mid m$ y $p^k \mid (m-i)$. Es decir $(m-i)_p \leq i_p$.

A continuación probaremos que si p es primo y n un entero mayor que 1. Entonces p divide a $\binom{n}{x}$ para todo $x \in \{1,2,\dots,n-1\}$ si y sólo si $n = p^a$ con a entero.

Si $p \mid \binom{n}{x}$ para todo $x \in \{1,2,\dots,n-1\}$, $p \mid \binom{n}{1} = n$. Poniendo $n_p = p^a$, se tiene:

$$\binom{n}{p^a} = \frac{n(n-1)\dots(n-p^a+1)}{p^a(p^a-1)\dots 2 \cdot 1}$$

y por el resultado previo concluimos que la p -parte de $\binom{n}{p^a}$ es 1, luego $n = p^a$.

Recíprocamente, si $n = p^a$, para cada $x \in \{1,2,\dots,p^a-1\}$,

$$\binom{n}{x} = \frac{p^a(p^a-1)\dots(p^a-x+1)}{x(x-1)\dots 2 \cdot 1}$$

y de nuevo por el resultado previo, la p -parte de $\binom{n}{x}$ es $\frac{p^a}{x_p}$, que es múltiplo de p por ser $x < p^a$.

4. Hallar todos los números enteros positivos n y k , tales que $(n+1)^n = 2n^k + 3n + 1$.

SOLUCIÓN. Para $n=1$, la ecuación se escribe $2 = 6$, claramente falsa. Luego $n \geq 2$. Por la fórmula del binomio de Newton,

$$(n+1)^n - 1 = n^2 + \binom{n}{2}n^2 + \binom{n}{3}n^3 + \dots$$

es múltiplo de n^2 . Tenemos entonces dos casos a analizar:

- $k=1$. Entonces, n^2 divide a $2n^1 + 3n = 5n$, es decir, n divide a 5, con lo que $n=5$, y la ecuación se convierte en $6^5 = 26$, claramente falsa.
- $k \geq 2$. Entonces, n^2 divide a $2n^k + 3n$, pero como divide a $2n^k$, también ha de dividir a $3n$, es decir, n divide a 3, con lo que $n=3$. Se comprueba fácilmente que para $n=3$, la ecuación se convierte en $4^3 = 2 \times 3^k + 10$, luego en $3^k = 27 = 3^3$, que es cierta si y sólo si $k=3$.

5. Una sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ se define mediante la recurrencia

$$a_1 = 1, a_2 = 5, a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 4}{a_{n-2}}, \text{ para } n \geq 3.$$

Demostrar que todos los términos de la sucesión son números enteros y encontrar una fórmula explícita para a_n .

SOLUCIÓN. Observamos a partir de la definición que $a_k a_{k-2} = a_{k-1}^2 + 4$ y $a_{k+1} a_{k-1} = a_k^2 + 4$. Restando a la segunda ecuación de la primera, resulta

$$a_{k+1} a_{k-1} - a_k a_{k-2} = a_k^2 - a_{k-1}^2 \Leftrightarrow a_{k-1}^2 + a_{k-1} a_{k+1} = a_k^2 + a_k a_{k-2},$$

que es equivalente a su vez a $a_{k-1}(a_{k-1} + a_{k+1}) = a_k(a_k + a_{k-2})$. Haciendo que $3 \leq k \leq n$, se obtienen

$$a_2(a_2 + a_4) = a_3(a_3 + a_1),$$

$$a_3(a_3 + a_5) = a_4(a_4 + a_2),$$

$$a_4(a_4 + a_6) = a_5(a_5 + a_3),$$

.....

$$a_{n-2}(a_{n-2} + a_n) = a_{n-1}(a_{n-1} + a_{n-3}),$$

$$a_{n-1}(a_{n-1} + a_{n+1}) = a_n(a_n + a_{n-2}).$$

Multiplicando las igualdades anteriores y simplificando términos, resulta

$a_2(a_{n-1} + a_{n+1}) = a_n(a_1 + a_3)$ y teniendo en cuenta que $a_1 = 1, a_2 = 5$ y $a_3 = 20$, resulta $a_{n+1} = 6a_n - a_{n-1}$. De este modo es inmediato que todos los términos de la sucesión son enteros.

Para encontrar una fórmula explícita de a_n ensayamos con $a_n = t^n$ con lo que obtenemos a partir de la última expresión que

$$t^{n+1} - 6t^n - a_{n-1} = 0 \Leftrightarrow t^{n-1}(t^2 - 6t + 1) = 0.$$

Se tienen tres soluciones. La primera $t = 0$, que no cumple con el enunciado. Las otras dos $t = 3 \pm 2\sqrt{2}$ combinadas linealmente, sí lo harán. Es decir la solución que buscamos es de la forma $a_n = \lambda(3 - 2\sqrt{2})^n + \mu(3 + 2\sqrt{2})^n$, $\lambda, \mu \in R$.

Para determinar las constantes λ y μ utilizamos que $a_1 = 1$ y $a_2 = 5$ y tenemos

$$\begin{cases} \lambda(3 - 2\sqrt{2}) + \mu(3 + 2\sqrt{2}) = 1 \\ \lambda(3 - 2\sqrt{2})^2 + \mu(3 + 2\sqrt{2})^2 = 5 \end{cases}$$

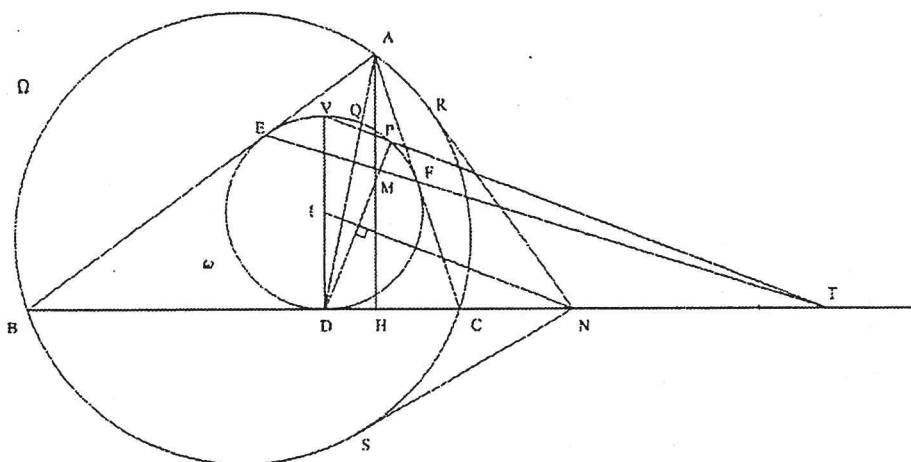
Resolviendo este sistema $\lambda = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$ y $\mu = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$, con lo que

$$a_n = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}(3 - 2\sqrt{2})^n + \frac{2 - \sqrt{2}}{4}(3 + 2\sqrt{2})^n.$$

6. Sea ABC un triángulo acutángulo, ω su circunferencia inscrita de centro I , Ω su circunferencia circunscrita de centro O , y M el punto medio de la altura AH , donde H pertenece al lado BC . La circunferencia ω es tangente a este lado BC en el punto D . La recta MD corta a ω en un segundo punto P , y la perpendicular desde I a MD corta a BC en N . Las rectas NR y NS son tangentes a la circunferencia Ω en R y S respectivamente. Probar que los puntos R, P, D y S están en una misma circunferencia.

SOLUCIÓN. Supongamos que $b = c$. Entonces, el pie de la altura H coincide con el punto de tangencia D , luego DM es perpendicular a BC y N no está definido. Asumiremos entonces sin pérdida de generalidad que $b > c$. Sea U el punto de la recta BC cuya potencia es la misma respecto de ω y Ω . Claramente, hay exactamente dos tangentes a cada una de ambas circunferencias que pasan por U , siendo D el punto de tangencia de una de ellas con ω ; llamemos E al punto de tangencia con ω de la segunda recta que pasa por U . La distancia de U a los cuatro puntos de tangencia es la misma, luego existe una circunferencia de centro U que pasa por los cuatro puntos, es decir, si demostramos que $U = N$, el problema quedaría resuelto. Ahora bien, el eje radical de la circunferencia descrita con centro U y ω , es claramente la recta DE y la perpendicular a esta recta por I es la mediatriz de la cuerda DE , luego pasa por U . Basta entonces con demostrar que el punto W de la altura AH cuya potencia es la misma respecto a la circunferencia de centro U por D y por E , y respecto a ω , es el punto medio de AH , con lo que sería $P = E$ y $N = U$. Ahora bien, dicha potencia es

$$UD^2 - UW^2 = ID^2 - IW^2$$



Pero $UW^2 = UH^2 + WH^2$, $IW^2 = (WH - ID)^2 + HD^2$, con lo que la anterior condición es equivalente a

$$UD^2 - 2WH \cdot ID = UH^2 - HD^2 = UD(UD - 2HD), \quad WH = \frac{HD \cdot UD}{ID},$$

y el problema se reduce a demostrar que esta última expresión es la mitad de la altura. Llamando s al semiperímetro de ABC , tenemos que $BD = s - b$, $CD = s - c$, $BH = c \cos B$, y al estar U definido como el punto sobre BC tal que su potencia es la misma respecto de ω y Ω , y llamando Σ al área de ABC y usando la fórmula de Herón para la misma, tenemos

$$UD^2 = (UD - BD)(UD + CD), \quad UD = \frac{BD \cdot CD}{CD - BD} = \frac{(s - b)(s - c)}{b - c} = \frac{\Sigma^2}{s(b - c)(s - a)}$$

Luego

$$\begin{aligned} WH &= \frac{h a(s - b - c \cos B)}{2(b - c)(s - a)} = \frac{h(a(a + b + c) - 2ab - a^2 - c^2 + b^2)}{2(b - c)(b + c - a)} = \\ &= \frac{h(ac - ab - c^2 + b^2)}{2(b - c)(b + c - a)} = \frac{h}{2}, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.